

# Onda su onda

*di P. Accomazzo, G. Mayer, N. Nolli, D. Paola*

## Area tematica

Relazioni e funzioni

## Autori

Pierangela Accomazzo, Giovanna Mayer, Nicoletta Nolli, Domingo Paola

## Ordine di scuola

Scuola secondaria secondo grado – secondo biennio

## Tempo medio per svolgere il percorso

15 ore

## Sommario

Scheda generale .....	3
Introduzione alle attività.....	11
Attività 1 .....	11
Attività 2 .....	12
Attività 3 .....	13
Attività 4 .....	16
Attività 5 .....	16
Indicazioni metodologiche .....	17
Spunti per approfondire .....	22
Elementi per prove di verifica .....	25
Risorse .....	28

## Scheda generale

### Nucleo tematico

Relazioni e funzioni

### Autori

P. Accomazzo, G. Mayer, N. Nolli, D. Paola

### Tematica affrontata

Introduzione delle funzioni armoniche a partire dall'analisi di un sistema massa-molla ideale.

### Descrizione

Si descrive, prima nel linguaggio comune, l'oscillazione di una massa appesa all'estremo libero di una molla, allo scopo di individuare le grandezze più significative; in seguito la descrizione prosegue con un sistema dinamico discreto per studiare, con l'aiuto di un foglio elettronico, l'evoluzione delle grandezze individuate. Si introducono quindi le funzioni seno e coseno con le loro proprietà caratteristiche. Infine si propongono alcune attività di applicazione a situazioni realistiche del modello costruito.

### Ordine di scuola

Secondo biennio di una scuola secondaria di secondo grado di qualunque ordine scolastico.

### Tempo medio per svolgere l'attività in classe

15 ore

### Nodi concettuali

- Modelli discreti e continui di fenomeni oscillatori.

- Proprietà qualitative di una funzione armonica e suo grafico.
- Proprietà locali e globali di una funzione armonica dai punti vista numerico, grafico e simbolico.
- Risoluzione di equazioni e di disequazioni goniometriche con metodi numerici, grafici e simbolici.
- Equazioni parametriche come strumento per descrivere una circonferenza.
- Differenza tra variabili e parametri in una stessa espressione.

## Indicazioni curriculari

Le attività M@t.abel hanno precisi obiettivi di apprendimento che rientrano tra quelli inseriti nelle Indicazioni nazionali attualmente in vigore (D.M. n. 211 del 07/10/2010, Direttiva n. 4 del 16/01/2012, Direttiva n. 5 del 16/01/2012) e nelle Prove INVALSI. All'inizio di ciascuna attività sono riportati, perciò, i relativi riferimenti presenti nelle Indicazioni nazionali e alcuni quesiti delle Prove Invalsi che ripropongono la situazione stimolo dell'attività considerata. Una domanda Invalsi può aiutare a valutare se gli allievi hanno sviluppato, attraverso lo svolgimento dell'attività, la capacità di utilizzare la matematica per rispondere a domande in una situazione specifica. Le domande sono tratte tra quelle presenti nei vari livelli scolastici, in quanto le attività M@t.abel sono pensate in un'ottica di verticalità.

### ***Indicazioni Nazionali per i Licei***

#### **Obiettivi specifici di apprendimento**

##### ***Relazioni e funzioni***

Studierà le funzioni elementari dell'analisi e dei loro grafici, in particolare [le funzioni polinomiali, razionali,] circolari [esponenziale e logaritmo]. Apprenderà a costruire semplici modelli [di crescita o decrescita esponenziale, nonché] di

andamenti periodici, anche in rapporto con lo studio delle altre discipline; tutto ciò sia in un contesto discreto sia continuo. Non sarà richiesta l'acquisizione di particolare abilità nella risoluzione di equazioni e disequazioni in cui compaiono queste funzioni, abilità che sarà limitata a casi semplici e significativi.

### ***Linee Guida per gli Istituti Professionali e Tecnici***

#### **Conoscenze**

- [Funzioni polinomiali; funzioni razionali e irrazionali; funzione modulo; funzioni esponenziali e logaritmiche]; funzioni periodiche.
- Costruire modelli, sia discreti che continui [di crescita lineare ed esponenziale e] di andamenti periodici.

#### **Abilità**

- Risolvere equazioni, disequazioni e sistemi relativi a funzioni goniometriche, [esponenziali, logaritmiche e alla funzione modulo] con metodi grafici o numerici e anche con l'aiuto di strumenti elettronici.

## Prove INVALSI

### a.s. 2010/2011 - Domanda D24

*Scuola secondaria di II grado – Classe II*

Il quesito può essere considerato propedeutico alle tematiche svolte nell'unità.

**D24.** La formula  $l = l_0 + k \cdot P$  esprime la lunghezza  $l$  di una molla al variare del peso  $P$  applicato.  $l_0$  rappresenta la lunghezza in centimetri "a riposo" della molla;  $k$  indica di quanto si allunga in centimetri la molla quando si applica una unità di peso.

Quale delle formule elencate si adatta meglio alla seguente descrizione:

*"È una molla molto lunga e molto resistente alla trazione"?*

- ☐ A.  $l = 15 + 0,5 \cdot P$
- ☐ B.  $l = 75 + 7 \cdot P$
- ☐ C.  $l = 70 + 0,01 \cdot P$
- ☐ D.  $l = 60 + 6 \cdot P$

### Soluzione INVALSI: C

#### *Commento*

Innanzitutto è bene notare che bassi valori della pendenza delle funzioni lineari, ossia del coefficiente  $k$ , indicano grande resistenza alla trazione (a parità di peso  $P$  la molla che si allunga meno è quella che ha il valore più basso di  $k$ ); inoltre alti valori dell'intercetta delle funzioni lineari, ossia del parametro  $l_0$ , indicano molle lunghe.

Le molle modellizzate dalle relazioni  $l = 70 + 0,01P$  e  $l = 75 + 7P$  sono quindi le più lunghe, ma la seconda ha un valore di  $k$  che è maggiore di quello di tutte le altre molle. Quindi è la molla meno resistente alla trazione. Invece la molla modellizzata da  $l = 70 + 0,01P$  oltre a essere la seconda per lunghezza, è quella che resiste alla trazione più di tutte le altre. Quindi è quella che meglio si adatta alla descrizione fornita dal testo della domanda. Per rispondere alla domanda bisogna avere una certa confidenza con semplici modelli lineari di situazioni fisiche e saper associare, ai parametri "intercetta" e "pendenza" della funzione lineare che modella il fenomeno, le caratteristiche fisiche dell'oggetto

osservato (in questo caso “lunghezza” e “resistenza alla trazione” della molla). La scelta dell’opzione B (uno studente su 3) è probabilmente dovuta all’errata identificazione “alti valori di  $k$ , elevata resistenza alla trazione”. Sarebbe stato sufficiente ragionare sulle conseguenze di questa affermazione per scartarla. In ogni caso anche questa domanda come la D11 e la D13 suggeriscono una attenzione non ancora sufficiente della prassi didattica all’uso di semplici modelli. Anche in questo caso, però, si deve considerare come nota positiva il fatto che quasi il 40% di studenti abbia risposto correttamente a un quesito non banale.

Motivazioni della scelta del quesito:

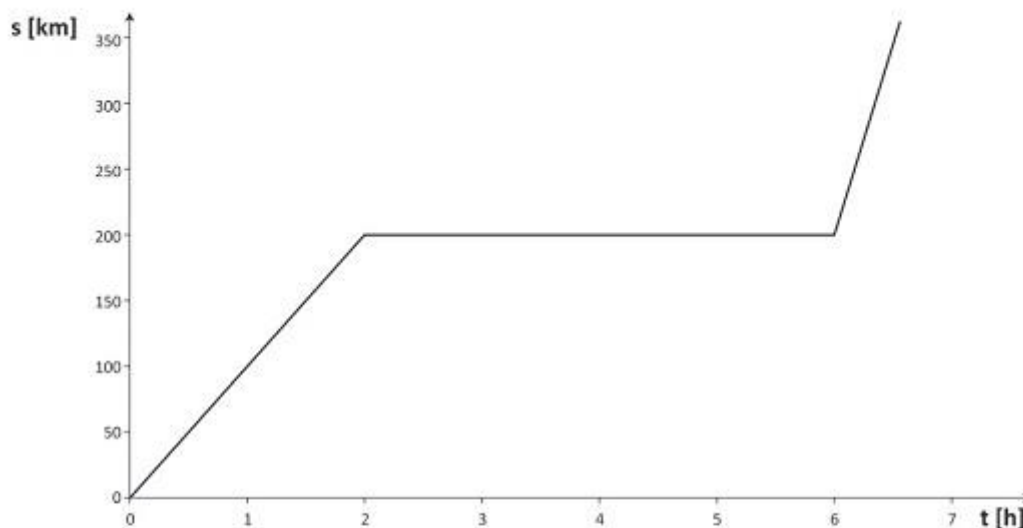
- tocca il nodo della modellizzazione riferito ad una situazione che ha delle analogie con il contesto da cui parte l’attività: esamina l’allungamento di una molla ricercando le grandezze significative;
- definisce relazioni tra grandezze e opera una conversione tra il linguaggio naturale ed il linguaggio algebrico.

**a.s. 2013/2014 - Domanda D28**

*Scuola secondaria di II grado – Classe II*

Il quesito può essere considerato propedeutico alle tematiche svolte nell'unità.

**D28.** Il seguente grafico rappresenta le posizioni assunte da un corpo in funzione del tempo. La posizione  $s$  è espressa in chilometri (km) e il tempo  $t$  in ore (h).



Quale fra le seguenti è una corretta descrizione del movimento del corpo?

- A. ☐ Si muove con velocità costante per 2 ore, poi si ferma per 6 ore e infine riparte con una velocità maggiore di quella con cui si è mosso nelle prime 2 ore
- B. ☐ Si muove con velocità costante per 2 ore, poi si ferma per 4 ore e infine riparte con una velocità minore di quella con cui si è mosso nelle prime 2 ore
- C. ☐ Si muove con velocità costante per 2 ore, poi si ferma per 6 ore e infine riparte con una velocità minore di quella con cui si è mosso nelle prime 2 ore
- D. ☐ Si muove con velocità costante per 2 ore, poi si ferma per 4 ore e infine riparte con una velocità maggiore di quella con cui si è mosso nelle prime 2 ore

**Soluzione INVALSI: D**

*Commento*

Per rispondere correttamente alla domanda gli studenti devono riuscire a riconoscere in un grafico posizione – tempo il significato di un tratto orizzontale (velocità uguale a 0) e di un cambiamento di pendenza (variazione di velocità). Il riconoscere che il tratto orizzontale “dura” per 4 ore consente di scartare le opzioni che affermano che il corpo si ferma per 6 ore (A e C). Il riconoscere che



la pendenza dell'ultimo segmento del grafico è maggiore della pendenza del primo segmento del grafico (che rappresenta il movimento del corpo nelle prime due ore) consente di scegliere l'opzione D fra le due rimaste.

Motivazioni della scelta del quesito:

- proprietà qualitative di una funzione dedotte dalla rappresentazione grafica;
- moto di un corpo: relazioni tra spazio, tempo e velocità.

### a.s. 2012/2013 - Domanda D6

*Scuola secondaria di I grado – Classe III*

Il quesito può essere considerato propedeutico alle tematiche svolte nell'unità.

**D6.** Quando si taglia un oggetto con una forbice, si esercita una forza ( $S$ ), mentre l'oggetto che si vuole tagliare oppone una resistenza ( $T$ ).

La formula

$$S = \frac{L \times T}{M}$$

permette di calcolare la forza che si esercita con una forbice, tenendo conto di due elementi: la distanza ( $L$ ) tra il perno fisso intorno a cui si muovono le lame e il punto in cui viene opposta la resistenza al taglio, e la distanza ( $M$ ) tra l'impugnatura e il perno fisso.

La forbice nella foto viene utilizzata per potare gli alberi.



a. Quale fra le seguenti formule descrive meglio una forbice come quella in fotografia?

A. ☐  $S = \frac{7 \times T}{1}$

B. ☐  $S = \frac{1 \times T}{7}$

C. ☐  $S = \frac{2 \times T}{4}$

D. ☐  $S = \frac{4 \times T}{2}$

b. Quale tra le seguenti frasi corrisponde alla forbice descritta da questa formula?

$$S = \frac{10 \times T}{5}$$

A. ☐ Una forbice con le lame molto corte, affilate e l'impugnatura molto robusta

B. ☐ Una forbice con le lame lunghe come la distanza fra il perno fisso e l'impugnatura

C. ☐ Una forbice con le lame più lunghe della distanza fra il perno fisso e l'impugnatura

D. ☐ Una forbice con le lame più corte della distanza fra il perno fisso e l'impugnatura

### Soluzione INVALSI:

D6\_a: B

D6\_b: C

### Commento

Il quesito riguarda la matematizzazione di un fenomeno fisico abbastanza usuale nella scuola secondaria di I° grado (le leve), tuttavia per risolverlo non è necessario conoscere la legge delle leve. Per rispondere correttamente lo studente deve essere in grado di collegare i parametri  $L$  e  $M$  della formula con la foto (item **a**) e con la descrizione di una forbice (item **b**). Nella foto si osserva una forbice con i manici molto lunghi rispetto alla superficie di taglio, si richiede di passare dall'immagine alla formula che la descrive nella quale il parametro  $M$  deve essere molto più grande rispetto al parametro  $L$ . L'unica formula che corrisponde a queste caratteristiche è l'opzione B. Nell'opzione A i parametri

sono invertiti, mentre nelle opzioni C e D la relazione fra i parametri (doppio-metà) è visibilmente in contraddizione con la figura. Nell'item **b** si richiede l'operazione inversa: dalla formula alla descrizione verbale della forbice corrispondente.

## Introduzione alle attività

Il modello dell'oscillatore armonico riveste un'importanza fondamentale nella descrizione di una vasta gamma di fenomeni: le onde sull'acqua provocate da un sasso che cade in uno stagno, i suoni che si propagano nell'aria quando si suona uno strumento musicale, le onde elettromagnetiche emesse da un'emittente televisiva, l'emissione di luce, i terremoti. L'attività si propone di prendere in considerazione un oscillatore armonico, ossia un sistema massa-molla ideale (molla di massa trascurabile e assenza di attriti) per introdurre le funzioni armoniche (seno e coseno) e le loro proprietà caratteristiche, anche al fine di utilizzarle in alcune applicazioni a fenomeni reali.

## Attività 1- La legge di Hooke

L'insegnante invita a considerare una massa  $m$  in equilibrio appesa a una molla in posizione verticale e chiede agli studenti di descrivere le forze che agiscono sulla massa. Lo scopo di questa prima fase dell'attività è quella di far riflettere gli studenti sull'opportunità di individuare variabili significative (la massa  $m$ , l'allungamento della molla, la forza peso e quella di richiamo della molla) o, in termini equivalenti, di trascurare alcune variabili allo scopo di semplificare la situazione reale per poterla descrivere.

L'attività può essere svolta con un esperimento reale oppure osservando e commentando esperimenti virtuali effettuabili mediante applet in rete (per esempio, <http://www.educaplanet.org/play-119-Ley-de-Hooke.html> oppure <http://group.chem.iastate.edu/Greenbowe/sections/projectfolder/flashfiles/working/functions.swf>).

Si arriva alla conclusione che un'adeguata descrizione della situazione considerata è fornita dalla legge di Hooke: la forza con cui agisce la molla sulla massa è di richiamo ed è direttamente proporzionale al suo allungamento. In altri termini, se per tenere in equilibrio una massa  $m$  la molla si è allungata di una quantità  $x$ , allora, per sorreggere una massa  $2m$  la molla si allunga di  $2x$ . Eseguendo più misure (o vedendole eseguire) gli studenti dovrebbero arrivare alla relazione che lega la forza  $F$  esercitata dalla molla sulla massa, all'allungamento  $x$  della molla

$$F = - k x$$

e a comprendere il significato del coefficiente  $k$  di proporzionalità.

## **Attività 2 - Il comportamento dinamico della massa: osservazione, formulazione di congetture e validazione mediante simulazione numerica**

### **Fase 1**

L'insegnante invita a considerare il caso in cui la massa sia messa in oscillazione lungo la verticale, per esempio spostandola dalla posizione di equilibrio e poi rilasciandola. Gli studenti osservano che cosa accade e cercano di descrivere qualitativamente il moto di oscillazione che la massa avrebbe in assenza di attriti. Al termine di questa fase dell'attività gli studenti dovrebbero concordare sul fatto che la massa oscilla, con moto periodico, intorno alla posizione di equilibrio (statico) fra la forza peso e la forza elastica della molla; che la velocità varia periodicamente nel tempo fra un minimo (agli estremi dell'oscillazione) e un massimo (nel punto di equilibrio statico); che anche l'accelerazione sembra variare periodicamente nel tempo fra un minimo (il punto di equilibrio statico) e un massimo (agli estremi dell'oscillazione). Anche la forza, legata all'allungamento da una legge di una proporzionalità diretta, dovrebbe quindi variare periodicamente nel tempo. L'osservazione può essere

effettuata con un esperimento reale, in classe o in laboratorio, oppure con un esperimento virtuale mediante applet che si trovano in rete.

## Fase 2

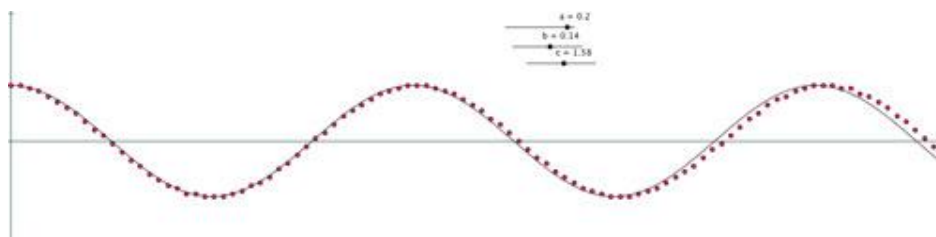
L'insegnante propone una [scheda guidata](#) che dovrebbe aiutare gli studenti a costruire un modello per descrivere adeguatamente la situazione considerata, in particolare la variazione di posizione, velocità e accelerazione nel tempo.

Ci si attende che gli studenti costruiscano, guidati dalla scheda e dall'insegnante, un foglio elettronico simile a quello cui rimanda il seguente collegamento ipertestuale in versione [Open office Calc](#) o in versione [MS Excel](#). L'insegnante può poi fornire un foglio di calcolo (versione [Open office Calc](#) oppure versione [MS Excel](#)) che presenta un algoritmo più adeguato a descrivere la situazione (si vedano le "Indicazioni metodologiche" e gli "Spunti per un approfondimento disciplinare").

## Attività 3- Introduzione delle funzioni armoniche

L'insegnante, osservando gli output grafici del foglio di calcolo ([MS Excel](#) oppure [Open office Calc](#)) fa notare agli studenti che posizione, velocità e accelerazione variano nel tempo con andamenti che, a parte i valori, presentano fortissime analogie. Si può quindi congetturare che variazione di posizione, velocità e accelerazione della massa possano essere descritte da una stessa famiglia di funzioni: le funzioni armoniche, definite da un'equazione del tipo  $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c)$  oppure  $f(x) = a \cdot \cos(b \cdot x + c)$ .

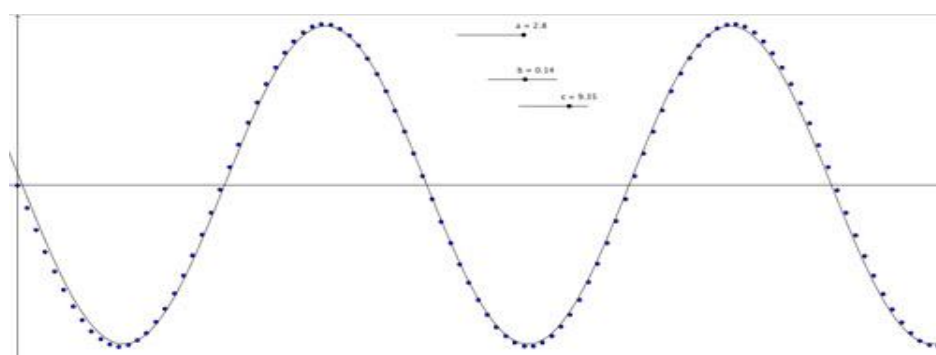
L'insegnante, per dare un supporto percettivo alla congettura, presenta e commenta agli studenti i files di geogebra:



Posizione [file Geogebra]

Visualizza il foglio di lavoro su GeogebraTube

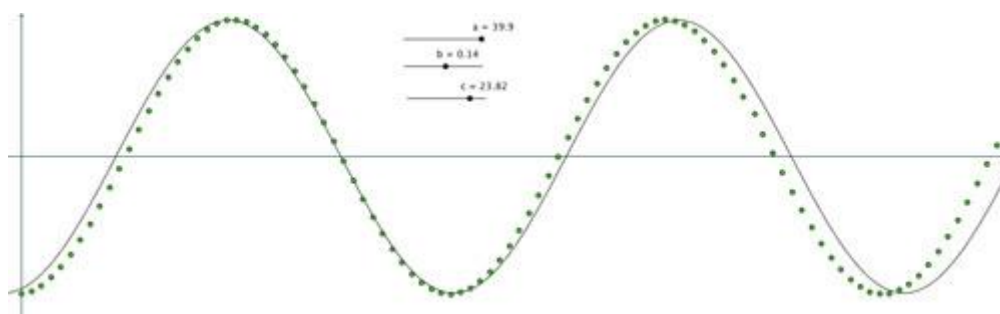
(<https://www.geogebra.org/m/UK3fDJW8>)



Velocità [file Geogebra]

Visualizza il foglio di lavoro su GeogebraTube

(<https://www.geogebra.org/m/kHdhBPSP>)



Accelerazione [file Geogebra]

Visualizza il foglio di lavoro su GeogebraTube

(<https://www.geogebra.org/m/pq6qPfHA>)

Nei quali:

1. sono stati riportati nel foglio di calcolo di geogebra rispettivamente la lista di valori {tempo, posizione}, la lista di valori {tempo, velocità}, la lista di valori {tempo, accelerazione} contenute nei fogli di calcolo di [MS Excel](#) e [Open office Calc](#) (valori dei parametri  $x_0 = 0,2$ ;  $v_0 = 0$  ;  $\Delta t = 0,01$ ;  $m = 1$  ;  $k = 200$ );
2. è stata definita una lista di punti, rispettivamente (tempo, posizione), (tempo, velocità) e (tempo, accelerazione) riportata sul piano cartesiano;
3. sono stati definiti due cursori  $a$  e  $b$  rappresentanti, rispettivamente, ampiezza e pulsazione dell'oscillazione e un cursore  $c$  che varia al variare del sistema di riferimento scelto per rappresentare il moto della massa;
4. è stata definita una funzione  $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c)$  di cui è stato disegnato il grafico.

L'insegnante mostra che, agendo opportunamente sui tre cursori, è possibile sovrapporre, con buona approssimazione, il grafico della funzione

$$f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c)$$

a ciascuna delle liste di punti (tempo, posizione), (tempo, velocità) e (tempo, accelerazione).

## Attività 4 - Sistemazione del lavoro svolto

L'insegnante può proporre due video della Physical Science Study Committee.

1. Video sul Moto Armonico Semplice

<https://youtu.be/m-K2UhFyY0w>

2. Video sulle relazioni tra moto armonico e moto circolare

[https://youtu.be/si1i4\\_UcgLU](https://youtu.be/si1i4_UcgLU)

Alla fine del filmato l'insegnante riprende alla lavagna la costruzione delle funzioni "seno" e "coseno" interpretandone i valori come coordinate di un punto che si muove su una circonferenza di raggio unitario con l'obiettivo di arrivare al disegno di grafici del tipo  $y = a \cdot \sin(bx + c)$  e alla risoluzione di equazioni e disequazioni del tipo

$$a \cdot \sin(bx + c) = k \quad a \cdot \sin(bx + c) > k.$$

## Attività 5- Applicazioni

Come detto nell'introduzione, molte sono le situazioni modellizzabili mediante funzioni armoniche. Può essere quindi opportuno proporre agli studenti una o due applicazioni diverse da quella da cui si è tratto spunto per introdurre le funzioni armoniche.

### Applicazione 1

La temperatura del mare varia nel corso dell'anno secondo una legge che, con buona approssimazione, si può ritenere sinusoidale, del tipo:

$$y = A + B \sin(Cx + D)$$



In questa formula  $x$  denota il giorno dell'anno ( $x = 1$  corrisponde al primo gennaio;  $x = 20$  al 20 gennaio, ...,  $x = 365$  corrisponde al 31 dicembre);  $y$  denota la corrispondente temperatura misurata in gradi centigradi.

Determinare le costanti  $A$ ,  $B$ ,  $C$  e  $D$  in accordo con i seguenti dati, desunti da una serie di rilevamenti sperimentali effettuati in una località marittima italiana:

- periodicità della funzione: 365 giorni;
- temperatura minima:  $9^{\circ}\text{C}$  registrata il 20 gennaio;
- temperatura massima:  $23^{\circ}\text{C}$  registrata il 20 luglio.

## Applicazione 2

Nell'attività sul moto parabolico (vedi anche la sezione **Spunti per altre attività con gli studenti**) si è visto che, fissato il valore del modulo della velocità iniziale e dell'accelerazione di gravità, la gittata varia al variare dell'angolo di lancio. Si chiede di determinare la funzione che lega la gittata all'angolo di lancio, di rappresentarla graficamente e di dimostrare che il massimo si ha per l'angolo di  $45^{\circ}$ .

## Indicazioni metodologiche

### Attività 1

Può essere svolta in laboratorio o in classe, con un lavoro individuale o in piccoli gruppi. L'importante è che le diverse proposte individuali o di gruppo siano infine condivise mediante una discussione guidata dall'insegnante. Per ridurre il tempo da dedicare a questa fase dell'attività è possibile che l'insegnante proponga subito una discussione collettiva discutendo le diverse proposte degli studenti.

L'obiettivo di arrivare alla formulazione della legge di Hooke sarebbe bene venisse raggiunto mediante semplici esperimenti reali, con misurazioni dirette in laboratorio o in classe, ma può anche essere ottenuto mediante esperimenti virtuali effettuabili grazie ad applet che si trovano in rete.

## **Attività 2**

### **Fase 1**

È importante che gli studenti siano invitati a riflettere sul fatto che nella descrizione del comportamento dinamico della massa entrano in gioco necessariamente la posizione, la velocità e l'accelerazione come funzioni del tempo. Si deve cercare di condurre gli studenti a osservare una evidente periodicità almeno nella variazione, rispetto al tempo, della posizione e della velocità e a fare intuire una variazione periodica di accelerazione e forza rispetto al tempo. Potrebbe risultare molto interessante fare attenzione, nelle descrizioni degli studenti, non solo al linguaggio utilizzato, ma anche all'uso eventuale di gesti coerenti con la descrizione del fenomeno. In questo caso l'insegnante potrebbe accompagnare gli stessi gesti utilizzati dagli studenti con un linguaggio tecnicamente e scientificamente adeguato: l'azione, molto probabilmente condotta nella zona di sviluppo prossimale dello studente, potrebbe rivelarsi particolarmente utile per il processo di costruzione di significato relativamente alla situazione considerata. L'osservazione può essere effettuata con un esperimento reale, in classe o in laboratorio, oppure con un esperimento virtuale mediante applet che si trovano in rete. La differenza di tipologia di variazione della forza rispetto all'allungamento (lineare) e rispetto al tempo (periodica) dovrebbe essere oggetto di particolare attenzione da parte degli studenti.

### **Fase 2**

L'attività dovrebbe essere svolta in laboratorio di informatica da piccoli gruppi di studenti e poi commentata in classe dall'insegnante con discussione collettiva in modo tale da condividere punti di forza e di debolezza delle diverse proposte e arrivare all'individuazione di un algoritmo adeguato a descrivere la situazione con una consapevolezza sui suoi limiti e sulle sue potenzialità. L'insegnante dovrebbe rimarcare agli studenti quello che è già scritto nella scheda proposta e

cioè che, allo scopo di costruire un modello della situazione, è utile tenere presente che si hanno a disposizione le equazioni orarie del moto rettilineo uniforme e uniformemente accelerato (già prese in considerazione, per esempio, nell'attività sul moto parabolico [inserire eventuale link all'attività sul moto parabolico] e quindi considerate un prerequisito per questa attività). È bene che la [scheda guidata](#) proposta venga ristrutturata tenendo presenti:

- le conoscenze e le competenze degli studenti relative alla situazione fisica considerata, all'uso di un foglio di calcolo elettronico e alla capacità di lavorare autonomamente in piccoli gruppi;
- Il tempo che si intende dedicare all'attività.

Gli studenti, variando il valore dei parametri e richiedendo i relativi grafici, dovrebbero accorgersi che se l'intervallo di tempo non è sufficientemente piccolo, la simulazione non funziona. Inoltre, anche scegliendo l'intervallo di tempo relativamente piccolo (per esempio 0,01 s) le ampiezze delle oscillazioni di posizione, velocità e accelerazione tendono ad aumentare con le iterazioni; questo è un limite del modello che potrebbe essere utile discutere, almeno nel caso gli studenti stessi lo richiedessero, per poi proporre un diverso algoritmo che fornisca un'approssimazione migliore e più stabile del moto della massa (vedi nella sezione Spunti per un approfondimento disciplinare). Il [foglio di calcolo](#) che fornisce una migliore approssimazione può anche essere presentato senza troppe giustificazioni o può anche essere proposto fin dall'inizio.

### Attività 3

Lo scorrimento dei cursori allo scopo di trovare, fra la famiglia di funzioni  $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c)$ , una che si adatti bene alla particolare lista di punti considerata può essere effettuato dall'insegnante o demandato agli studenti in laboratorio di informatica. Questa attività, se si ritiene di avere dedicato già un tempo rilevante al lavoro può essere omessa, anche se, a nostro avviso, essa dà un

notevole contributo al riconoscimento del significato fisico e geometrico dei parametri  $a$  e  $b$ .

Si osservi che il punto caratterizzante questa proposta è l'introduzione della famiglia di funzioni  $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c)$  come una sorta di “scatola nera”, di “oggetto misterioso” che può rappresentare bene i dati numerici forniti dal sistema dinamico discreto. I parametri  $a$ ,  $b$  e  $c$  costituiscono a tutti gli effetti una vera e propria “scatola degli attrezzi” per individuare una funzione che descriva bene il fenomeno. Naturalmente qui si utilizzano a piene mani e probabilmente in modo non usuale le risorse messe a disposizione dagli strumenti di calcolo automatico numerico.grafico-simbolico.

Dopo un percorso simile a quello proposto, gli studenti dovrebbero essere motivati a “smontare” la scatola nera, partendo dalla definizione delle funzioni “ $\sin(x)$ ” e “ $\cos(x)$ ”. Questo percorso propone:

- un iniziale lavoro in quella dimensione della matematica che Freudenthal chiamava “orizzontale” e che consiste in un lavoro di costruzione del modello e quindi applicativo;
- un successivo lavoro interno alla matematica, in quella dimensione che sempre Freudenthal definiva come “verticale” e che porta alla proposta dei temi fondamentali della trigonometria previsti dalle indicazioni curriculari.

#### **Attività 4**

Lo scopo di questa attività è quello di rendere più sistematiche le varie osservazioni suggerite dalle e con le precedenti attività e consolidare le conoscenze che dovrebbero iniziare a formarsi negli studenti. I filmati vanno visti insieme agli studenti, fermati e commentati nei punti essenziali, collegandoli ai contenuti già affrontati. In alcuni casi può essere utile chiedere agli studenti, dopo avere messo in pausa il filmato, di prevedere il prosieguo dello stesso, giustificando la previsione.

La costruzione delle funzioni “seno” e “coseno”, interpretandone i valori come coordinate di un punto che si muove su una circonferenza di raggio unitario,

può essere svolta nel modo tradizionale o anche avvalendosi delle risorse offerte dalle nuove tecnologie. Per esempio, potrebbe essere opportuno far fare agli studenti altre esperienze su come cambiano i grafici di  $\sin(x)$  e  $\cos(x)$  effettuando le seguenti operazioni:

$\sin(x) + k$  (traslazione sull'asse  $y$ );

$\sin(x - h)$  (traslazione sull'asse  $x$ );

$a \cdot \sin(x)$  (stiramento/contrazione sull'asse  $y$ );

$\sin(b \cdot x)$  (stiramento/contrazione sull'asse  $x$ ).

Gli studenti dovrebbero diventare abbastanza abili nel disegno di grafici del tipo  $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x - h) + k$  oppure  $f(x) = a \cdot \cos(b \cdot x - h) + k$ .

Dovrebbero inoltre avere un'idea di come si possano interpretare graficamente e risolvere numericamente (in modo approssimato) equazioni e disequazioni del tipo

$$a \cdot \sin(b \cdot x - h) = k;$$

$$a \cdot \sin(b \cdot x - h) > k;$$

$$a \cdot \cos(b \cdot x - h) = k ; a \cdot \cos(b \cdot x - h) > k.$$

Riteniamo che la capacità di risolvere in modo approssimato equazioni e disequazioni di questo tipo e di interpretarle graficamente sia obiettivo di grande importanza e alla portata di studenti che abbiano seguito un percorso simile a quello presentato. L'abilità a risolvere simbolicamente equazioni e disequazioni di varia tipologia, mediante l'applicazione di formule goniometriche, sostituzioni, artifici, procedimenti vari è sicuramente indice di buone capacità matematiche, ma forse non è una competenza che si possa richiedere a tutti gli studenti. Il suo conseguimento, inoltre, rischia di sottrarre risorse preziose per il conseguimento di obiettivi di ben più elevato valore culturale. Può essere interessante fare notare agli studenti che le equazioni parametriche  $x(t) = A \sin(kx)$  e  $y(t) = A \cos(kx)$  possono essere utilizzate per descrivere una

circonferenza di centro l'origine e raggio  $A$ . Invece  $x(t) = A \sin(kx)$  e  $y(t) = B \cos(kx)$  un'ellisse di centro l'origine e semiassi  $A$  e  $B$ .

## Attività 5

Naturalmente molte altre applicazioni possono essere proposte: la scelta deve dipendere dagli interessi degli studenti e dell'insegnante (si veda anche la sezione Spunti per altre attività con gli studenti).

## Spunti per approfondire

### Spunti per un approfondimento disciplinare

La seconda fase dell'attività 2 si presta, soprattutto per studenti particolarmente motivati e attenti, a considerazioni e attività che consentono di affrontare discorsi relativi ai punti di forza e di debolezza dei modelli scelti e all'affidabilità e stabilità degli algoritmi utilizzati per la simulazione dei fenomeni studiati. Si può dire agli studenti che altri algoritmi sono possibili rispetto a quello scelto. Per esempio quello descritto dalle seguenti equazioni:

$$a_n = \left( -\frac{k}{m} \right) x_n$$

$$x_n = x_{n-1} + v_{n-1} \Delta t$$

$$v_n = v_{n-1} + a_{n-1} \Delta t$$

Anche questo algoritmo di calcolo, però, non risolve i problemi incontrati. Si può allora far riflettere gli studenti che, se nell'equazione

$$x_n = x_{n-1} + v_{n-1} \Delta t$$

si sceglie come valore costante della velocità quello che ha nell'istante iniziale dell'intervallo di tempo  $\Delta t$  considerato, si ottiene una valutazione dello spazio percorso che è per difetto nei tratti in cui la velocità aumenta e per eccesso nei tratti in cui la velocità diminuisce; considerazioni analoghe, ma opposte, si possono fare nel caso in cui si scelga come costante il valore della velocità nell'istante finale dell'intervallo di tempo considerato. Si hanno quindi due approssimazioni successive, una sul calcolo del valore della velocità e l'altra sul

calcolo del valore della posizione: l'idea è quella di provare a realizzare una delle due approssimazioni per eccesso e l'altra per difetto, in modo tale che i due effetti tendano a compensarsi e non a sommarsi.

Ciò può essere realizzato con le equazioni

$$a_n = \left(-\frac{k}{m}\right)x_n$$

$$x_n = x_{n-1} + v_n \Delta t$$

$$v_n = v_{n-1} + a_{n-1} \Delta t$$

Si ottiene così un diverso [algoritmo di calcolo](#) e un diverso foglio di calcolo in cui i problemi di approssimazione incontrati sono parzialmente superati.

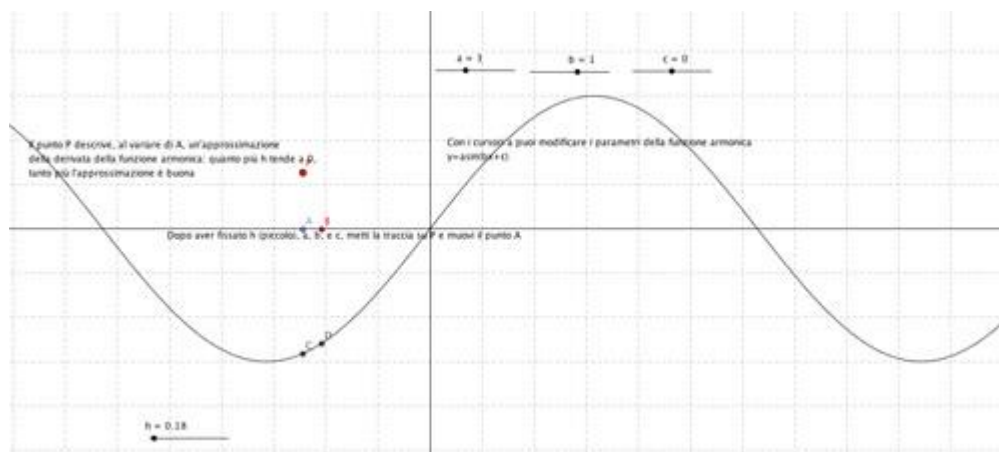
L'attività 4 si presta a un approfondimento orientato al CLIL: si potrebbe proporre agli studenti una lezione in inglese sul moto armonico o sulla legge di Hooke scelta fra una delle tante che si trovano in rete. Ad esempio:

<https://youtu.be/thBn6wdzfeA>

La proposta di video lezioni in lingua inglese è a nostro avviso particolarmente efficace quando gli studenti conoscono gli argomenti di cui le lezioni trattano; in questo caso, infatti, l'argomento disciplinare proposto non dovrebbe creare eccessive difficoltà di apprendimento, ulteriormente amplificate, almeno per la maggior parte degli studenti dall'uso di una lingua diversa da quella madre. Un approfondimento riservato a studenti con forte motivazione per gli studi scientifici e con forti abilità può essere il commento di una lezione in lingua inglese a livello universitario sulle onde e oscillazioni; ce ne sono varie in rete, ma quelle del prof. Lewin del MIT sono particolarmente stimolanti. In rete c'è un intero corso del prof. Lewin sulle oscillazioni e onde; potrebbe essere utile vedere la prima lezione: <https://youtu.be/OvDePn41fPY>

Un ulteriore approfondimento può riguardare la costruzione, con alcuni studenti di un file di geogebra nel quale si costruisca una funzione armonica del tipo  $y = a \sin(bx+c)$  il cui grafico sia modificabile agendo su tre cursori  $a$ ,  $b$  e  $c$  e in cui sia definito un punto  $P$  la cui ascissa vari al variare dell'ascissa  $x$  di un punto generico  $A$  della funzione armonica e la cui ordinata sia fornita dal rapporto incrementale  $(f(x+h) - f(x))/h$  ove la variazione di  $h$  sia possibile grazie a un

ulteriore cursore. Al variare di  $A$ ,  $P$  descrive un'approssimazione tanto migliore della derivata della funzione  $y = a \sin(bx+c)$  quanto più è piccolo  $h$ . Gli studenti dovrebbero essere messi in condizione di osservare che se il grafico della funzione  $y = a \sin(bx+c)$  descrive la posizione di un punto che si muove di moto armonico, allora  $P$  descrive quello della velocità del punto.



[Derivata](#) [file geogebra]

[Visualizza il foglio di lavoro su GeogebraTube](#)

(<https://www.geogebra.org/m/VV9DvNkb>)

### Spunti per altre attività con gli studenti

Uno spunto per altre attività con gli studenti può essere il seguente:

costruire una tabella che dia, in funzione del numero  $n$  dei giorni dell'anno (contati assegnando al 22 marzo il numero 1):

- l'ora effettiva del sorgere del sole (con un'approssimazione di circa 5 minuti);
- l'ora effettiva del tramontare del sole (con un'approssimazione di 5 minuti).

Dopo avere raccolto i dati nel corso dell'anno, li si riportino su uno stesso piano cartesiano, cercando, con l'aiuto di Geogebra, due funzioni armoniche che li rappresentino con una buona approssimazione.

Questa attività richiede un tempo di osservazione molto lungo, ma potrebbe costituire una buona occasione di collaborazione a distanza con classi di



studenti stranieri per vedere come cambiano le funzioni trovate al variare della latitudine. Anche questa attività potrebbe essere facilmente orientata al CLIL.

Un secondo spunto, soprattutto per classi che possono disporre facilmente di strumentazione che consente raccolta di dati on-line e successiva elaborazione al pc, può essere la raccolta di dati con sonde sonore o con sensori di posizione per osservare la periodicità del passo in una camminata.

## Elementi per prove di verifica

A partire dal grafico di  $y = \sin(x)$ , disegnare, in un periodo, successivamente, i grafici di:

$$y = \sin(x - \pi/3)$$

$$y = \sin(2x - \pi/3)$$

$$y = 3\sin(2x - \pi/3)$$

$$y = 3\sin(2x - \pi/3) + 1$$

2. A partire dal grafico di  $y = \sin(x)$ , disegnare, in un periodo, successivamente, i grafici di:

$$y = \sin(x + \pi/4)$$

$$y = \sin(x/2 + \pi/4)$$

$$y = 0,5 \cdot \sin(x/2 + \pi/4)$$

$$y = -0,5 \cdot \sin(x/2 + \pi/4)$$

$$y = -0,5 \cdot \sin(x/2 + \pi/4) - 3$$

3. A partire dal grafico di  $y = \cos(x)$ , disegnare, in un periodo, successivamente, i grafici di:

$$y = \cos(x + \pi/3)$$

$$y = \cos(2x + \pi/3)$$

$$y = 0,5 \cdot \cos(2x + \pi/3)$$

$$y = 0,5 \cdot \cos(2x + \pi/3) - 2$$

4. A partire dal grafico di  $y = \sin(x)$ , disegnare, in un periodo, successivamente, i grafici di:

$$y = \cos(x - \pi/4)$$

$$y = \cos(x/3 - \pi/4)$$

$$y = 2 \cdot \cos(x/3 - \pi/4)$$

$$y = -2 \cdot \cos(x/3 - \pi/4)$$

$$y = -2 \cdot \cos(x/3 - \pi/4) + 3$$

5. Disegnare, in un periodo, i grafici di:

$$y = 4 \cos(3x + \pi/6) - 4$$

$$y = -0,3 \cdot \cos(x/4 - \pi/4) + 1$$

$$y = -4 \cdot \sin(x/2 + \pi/4) - 3$$

$$y = 5 \cdot \sin(4x - \pi/5) + 1$$

6. Disegnare, in un periodo, i grafici di:

$$y = 4 \cos(2x/3 + \pi/5)$$

$$y = -0,5 \cdot \sin(3x/4 - \pi/8)$$

7. Interpretare graficamente e risolvere numericamente in modo approssimato le seguenti equazioni

$$4 \cos(3x + \pi/6) = 3$$

$$-4 \cdot \sin(x/2 + \pi/4) = 3$$

8. Interpretare graficamente e risolvere numericamente in modo approssimato le seguenti disequazioni

$$-3 \cdot \cos(x/3 - \pi/4) > 2$$

$$0,5 \cdot \sin(x/2 + \pi/4) < 0,3$$

9. Interpretare graficamente e risolvere numericamente in modo esatto le seguenti equazioni

$$4 \cos(3x + \pi/6) = 4$$

$$-4 \cdot \sin(x/2 + \pi/4) = 2$$

10. Interpretare graficamente e risolvere numericamente in modo esatto le seguenti disequazioni

$$-2 \cdot \cos(x/3 - \pi/4) > 1$$

$$0,5 \cdot \sin(x/2 + \pi/4) < 0,25$$

11. Un punto  $P$  di una corda elastica oscilla di moto sinusoidale nel tempo  $t$  secondo l'equazione

$$y = 3,00 \sin(20t)$$

dove  $y$  è l'elongazione (in millimetri) di  $P$ , ossia il suo spostamento dalla posizione di equilibrio e  $t$  l'istante di tempo (in secondi). Dopo avere disegnato il grafico di  $y(t)$  in un sistema di riferimento cartesiano  $Oyt$ , calcolare:

- la massima ampiezza  $A$  dell'onda;
- il periodo  $T$  di quest'onda;
- la velocità massima di  $P$  considerando trascurabile lo smorzamento;
- l'accelerazione massima di  $P$  considerando trascurabile lo smorzamento.

## Risorse

### Documentazione e materiali

Scheda guidata di laboratorio per la fase 2 dell'attività 2.

(in versione [MS Word](#) e in versione [Open office Write](#) ).

Foglio di calcolo in [Open office Calc](#) per la fase 2 dell'attività 2.

Un foglio di calcolo in [Open office Calc](#) e in [MS Excel](#) che presenta un algoritmo più adeguato a descrivere la situazione relativa alla fase 2 dell'attività 2.

File di Geogebra [posizione](#) , [velocità](#) e [accelerazione](#) per l'attività 3.

[Filmato sul moto armonico semplice](#)

[Filmato sulle relazioni tra moto armonico e circolare](#)

[Lezione in inglese sul moto armonico](#)

[Applet sulla legge di Hooke per esperimenti virtuali](#) oppure [qui](#) .

[Lezione del prof. Lewin del MIT in inglese, a livello universitario, introduttiva allo studio e all'analisi dei fenomeni oscillatori](#) .

[Derivata](#) [*file geogebra*], file che consente di disegnare il grafico di una funzione armonica del tipo  $y = a \sin(bx + c)$  al variare dei suoi parametri e che fornisce il grafico della derivata della funzione.

### Bibliografia

Sui sistemi dinamici discreti:

Impedovo, M.(2003). Sistemi dinamici discreti, *Progetto Alice*, 3.

Disponibile on line all'indirizzo

<http://www.matematica.it/impedovo/articoli/Sistemi%20dinamici%20discreti.pdf>

Sull'uso di equazioni parametriche e sulla relazioni tra moto circolare e moto armonico:

Impedovo, M. (2002). Moti piani ed equazioni parametriche, *Atti quarto convegno ADT*, Monopoli.

Disponibile online all'indirizzo

<http://www.matematica.it/impedovo/articoli/Equazioni%20parametriche.pdf>

### **Sitografia**

[Physics I: Classical Mechanics](#) (visitato nel giugno 2022)

Corso online del prof. Walter Lewin del MIT, alcune videolezioni riguardano le perturbazioni periodiche e armoniche.

*Questo prodotto multimediale è stato realizzato nel 2013 da INDIRE con i fondi stanziati dal MIUR – Uff. VI nell’ambito del progetto **m@t.abel** – **Apprendimenti di Base**. La grafica, i testi, le immagini, l’audio, i video e ogni altra informazione disponibile in qualunque formato sono utilizzabili a fini didattici e scientifici, purché non a scopo di lucro e sono protetti ai sensi della normativa in tema di opere dell’ingegno (legge 22 aprile 1941, n. 633).*